

ПОСТРОЕНИЕ ГИБРИДНЫХ МЕТОДОВ  
С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ РУНГЕ-КУТТЫГ.Ю.МЕХТИЕВА, В.Р.ИБРАГИМОВ  
*Бакинский Государственный Университет*

*Как известно, существуют, в основном, два класса численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти классы являются развитием метода Эйлера по разным направлениям. Поэтому возникает такой естественный вопрос о том, что какая связь имеется между ними. В работе дан ответ на этот вопрос и построены многошаговые методы на основе методов Рунге-Кутты.*

**Введение.** Автор первой книги, написанной по методам вычислений, академик А.Н. Крылов, отмечает, что первый прямой численный метод для решения обыкновенных дифференциальных уравнений был построен Л.Эйлером (см. [1]). Учитывая невысокую точность метода, Эйлер, для построения более точных методов, предложил вычисление последующих членов в разложении Тейлора решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, т.к. первые два члена этого разложения совпадают с формулой Эйлера. Адамс и Рунге предложили разные способы для вычисления указанных членов в Тейлоровском разложении, в результате чего появились методы Адамса и Рунге-Кутты. Следовательно, каждый из этих методов является развитием метода Эйлера, и каждый из этих методов имеет свое преимущество и недостатки. Поэтому некоторые специалисты на стыке этих методов построили методы, которые сохраняют лучшие качества этих методов. В данной работе исследована связь между классическими методами Рунге-Кутты и Адамса, в результате чего построены явные многошаговые методы, а также многошаговые методы типа гибридных.

**1. Построение гибридных методов**

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

Предположим, что задача (1) имеет единственное решение, определенное на отрезке  $[x_0, X]$ , которое имеет непрерывную производную до некоторого порядка  $p + 1$ , включительно.

Известно, что классический метод Рунге-Кутты можно написать в

следующем виде (см., напр., [4]):

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{\nu} p_i k_i, \quad (2)$$

где

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_{2,1} h k_1),$$

.....

$$k_{\nu} = f(x_n + \alpha_{\nu} h, y_n + \beta_{\nu,1} h k_1 + \beta_{\nu,2} h k_2 + \dots + \beta_{\nu,\nu-1} h k_{\nu-1}).$$

Здесь коэффициенты  $p_i, \alpha_i, \beta_{i,j}$  ( $i = 1, 2, \dots, \nu; j = 1, \dots, \nu - 1; \alpha_1 = 0$ ) подбираются так, чтобы метод (2) имел наиболее высокий порядок точности. При  $\nu = 1$  из метода (2) следует известный метод Эйлера, который можно написать в виде:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n). \quad (3)$$

Положим  $\nu = 2$ . Тогда из (2) можно получить следующий метод:

$$y_{n+1} = y_n + h(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h f(x_n, y_n))) / 2, \quad (4)$$

который является методом Рунге-Кутты второго порядка.

Если учтем метод Эйлера в методе (4), то имеем

$$y_{n+1} = y_n + h(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})) / 2. \quad (5)$$

Отметим, что

$$x_{n+i} = x_n + ih, \quad y_{n+i} \approx y(x_n + ih) \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

а  $y(x_n + ih)$  является точным значением решения задачи (1) в точках  $x_n + ih$ .

Метод (5) является методом трапеции и входит в класс интерполяционных методов Адамса, который также имеет второй порядок точности.

Рассмотрим следующий метод Рунге-Кутты второго порядка:

$$y_{n+1} = y_n + h k_2, \quad (6)$$

где

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + h/2, y_n + h k_1 / 2).$$

Здесь, в методе (6) заменим  $h$  на  $2h$ . Тогда имеем:

$$y_{n+2} = y_n + 2h f(x_n + h, y_n + h(x_n, y_n)).$$

С помощью метода Эйлера  $y_n + h f(x_n, y_n)$  заменим через  $y_{n+1}$ .

Тогда получим:

$$y_{n+2} = y_n + 2h f(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Полученный метод также имеет второй порядок точности и входит в класс методов Адамса.

Рассмотрим следующий метод Рунге-Кутты, который также имеет

второй порядок точности:

$$y_{n+1} = y_n + h(k_1 + 3k_2) / 4, \quad (7)$$

где

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + 2h/3, y_n + 2hk_1/3).$$

Заменяя  $h$  на  $2h$  в методе (7), имеем:

$$y_{n+2} = y_n + h(f(x_n, y_n) + 3f(x_n + 4h/3, y_n + 4hf(x_n, y_n)/3)) / 2. \quad (8)$$

Здесь также, используя метод Эйлера в методе (8), перепишем его в виде:

$$y_{n+2} = y_n + h \left( f(x_n, y_n) + 3f \left( x_{n+\frac{4}{3}}, y_{n+\frac{4}{3}} \right) \right) / 2. \quad (9)$$

В результате получили гибридные методы. Легко можно показать, что

$$y(x + 2h) - y(x) = 2hy'(x + h) + \frac{1}{3}h^3 y'''(x + h) + O(h^5),$$

$$y'(x) + 3y'(x + 4h/3) = 4y'(x + h) + \frac{2}{3}h^2 y'''(x + h) + O(h^3).$$

Учитывая эти соотношения в (9), получаем:

$$\begin{aligned} & y(x + 2h) - y(x) - h(f(x, y(x)) + 3f(x + 4h/3, y(x + 4h/3))) / 2 = \\ & = (-2/27)h^4 y^{IV}(x + h) + O(h^5). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что метод (9) имеет третий порядок точности, в то время как соответствующий метод Рунге-Кутты, т.е. метод (7), имеет второй порядок точности. Таким образом, получили, что при построении многошаговых методов на базе методов Рунге-Кутты, порядок точности этих методов может не совпадать. Для объяснения природы таких ситуаций рассмотрим следующий метод Рунге-Кутты третьего порядка:

$$y_{n+1} = y_n + h(k_1 + 3k_3) / 4, \quad (10)$$

где

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = (x_n + h/3, y_n + hk_1/3), \quad k_3 = (x_n + 2h/3, y_n + 2hk_2/3).$$

Заменим сначала в методе (10)  $h$  на  $2h$ . Тогда из (10) имеем:

$$y_{n+2} = y_n + h(f(x_n, y_n) + 3f(x_n + 4h/3, y_n + 4hf(x_n + 2h/3, y_n + 2hf(x_n, y_n)/3)/3)) / 2.$$

Поступая точно так же, как в методе (7), можем написать:

$$\begin{aligned} & y_n + 2hf(x_n + 2h/3, y_n + 2hf(x_n, y_n)/3) / 3 + 2hf(x_n + 2h/3, y_n + 2hf(x_n, y_n)/3) / 3 = \\ & = y_{n+\frac{2}{3}} + 2hf(x_n + 2h/3, y_n + 2hf(x_n, y_n)/3) / 3 = y_{n+\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$y_{n+2} = y_n + h \left( f(x_n, y_n) + 3f \left( x_{n+\frac{4}{3}}, y_{n+\frac{4}{3}} \right) \right) / 2. \quad (11)$$

Метод (11) совпадает с методом (9), из которого следует, что метод (11) имеет третий порядок точности. Таким образом, мы показали, что если построить гибридные методы на базе методов (7) и (10) (имеющие разные порядки точности), то в результате полученные методы совпадают и имеют третий порядок точности. Теперь, пользуясь методом (10), построим явный многошаговый метод. Для этого заменим  $h$  на  $3h$ . Тогда имеем:

$$y_{n+3} = y_n + 3h(f(x_n, y_n) + 3f(x_n + 2h, y_n + 2hf(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))))/4. \quad (12)$$

Здесь сначала используем неявный метод Эйлера, затем явный метод Эйлера. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} y_n + 2hf(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)) &= y_n + 2hf(x_{n+1}, y_{n+1}) = \\ &= y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_{n+1} + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_{n+2}. \end{aligned}$$

С учетом полученного, метод (12) запишем в виде:

$$y_{n+3} = y_n + 3h(f(x_n, y_n) + 3f(x_{n+2}, y_{n+2}))/4. \quad (13)$$

Если в (13) пользоваться соотношением

$$y_n = y_{n+2} - h(f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 4f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n))/3,$$

то получим следующий метод:

$$y_{n+3} = y_{n+2} + h(23f(x_{n+2}, y_{n+2}) - 16f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 5f(x_n, y_n))/12,$$

который является экстраполяционным методом Адамса третьего порядка.

Выше, при построении многошаговых методов с помощью методов Рунге-Кутты, мы получили явные методы. Теперь покажем, что при использовании выше описанных схем можно получить и неявные методы. Рассмотрим следующий метод Рунге-Кутты, имеющий четвертый порядок точности:

$$y_{n+1} = y_n + h(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)/8, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \quad k_2 = (x_n + h/3, y_n + hk_1/3), \quad k_3 = (x_n + 2h/3, y_n - hk_1/3 + hk_2), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + h(k_1 - k_2 + k_3)). \end{aligned}$$

Из определений  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) видно, что для того, чтобы на базе метода (14) построить многошаговый метод, необходимо использовать замену  $h$  на  $3h$ . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} y_{n+3} &= y_n + 3h(f(x_n, y_n) + 3f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)) + \\ &3f(x_{n+2}, y_n - hf(x_n, y_n) + 3hf(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))) + \\ &f(x_{n+3}, y_n + 3h(f(x_n, y_n) - f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))) + \\ &f(x_{n+2}, y_n - hf(x_n, y_n) + 3hf(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))))/8. \end{aligned} \quad (15)$$

После применений метода Эйлера, соотношение (15) принимает следующий вид:

$$y_{n+3} = y_n + 3h(f(x_n, y_n) + 3f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 3f(x_{n+2}, y_{n+2}) + f(x_{n+3}, y_{n+3}))/8. \quad (16)$$

Если в методе (16) пользоваться соотношением:

$$y_n = y_{n+2} - h(f(x_n, y_n) + 4f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_{n+2}, y_{n+2}))/3,$$

то получим следующий метод:

$$y_{n+3} = y_{n+2} + h(f(x_n, y_n) - 5f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 19f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 9f(x_{n+3}, y_{n+3}))/24.$$

Полученный метод является интерполяционным методом Адамса четвертого порядка точности. Таким образом, мы показали, как можно построить гибридные и многошаговые методы с помощью явных методов Рунге-Кутты. Учитывая широкий арсенал методов Рунге-Кутты с конкретными порядками и некоторые недостатки одношаговых методов, можно сказать, что результат данной работы найдет свое широкое применение и будет полезным при построении новых методов.

Отметим, что при построении гибридных методов мы использовали методы с забеганием вперед. Конкретные примеры, показывающие преимущества этих, а также гибридных методов можно найти в [2] и [6].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А.Н. Лекции о приближенных вычислениях. – М.; Гостех-издат, 1950, 400 с.
2. Ибрагимов В.Р. Один нелинейный метод численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений/ Дифференциальные уравнения и применения : Труды докл. Второй Международ. Конф. 29 июня – 4 июля 1981г. Руссе, Болгария, 1982, с.310-319.
3. Мамедов Я.Д. Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Баку: Маариф, 1974, 175 с.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. -2-е изд.перераб. –М.: Физматгиз, 1962, 639с.
5. Dahlquist G.: Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equation. Math. Scand. 4 (1956), 33-53.
6. Ibrahimov V.R., Mehdiyeva G.Yu., Nasirova I.I On the expansion of stability region for the forward jumping methods. Transactions of NAS of Azerbaijan. 4 (2005), p.163-170.
7. Ibrahimov V.R., Mehdiyeva G.Yu., Nasirova I.I. On some connections between Runge-Kutta and Adams methods. Transactions of NAS of Azerbaijan. 5 (2005), p. 183-190.

## **RUNQE-KUTTA ÜSULUNUN KÖMƏYİ İLƏ İRƏLİYƏ QAÇMA ÜSULLARININ QURULMASI**

**Q.Y.MEHDİYEVA, V.R.İBRAHİMOV**

### **XÜLASƏ**

Adi diferensial tənliklərin ədədi həlli üçün ən çox istifadə olunan Runqe-Kutta və Adams üsullarının ümumiləşməsi olan bir və çoxaddımlı üsullardır. Bu üsulların hər ikisi Eyer üsulunun ümumiləşməsi olduğu üçün bu üsullar arasında müəyyən bir əlaqə olmalıdır. Bu məqalədə məqsəd aşkar Runqe-Kutta və Adams üsulları arasındakı əlaqədən istifadə edərək çoxaddımlı üsullar qurmaqdan ibarətdir. Burada aşkar, qeyri-aşkar və irəliyə qaçma üsulları aşkar Runqe-Kutta üsulunun köməyi ilə qurulmuş və onlar məlum üsullarla müqayisə edilmişdir.

## **CONTRACTION HYBRID METHODS WITH THE HELP OF THE RUNQE-KUTTA METHODS**

**G.Y.MEHDİYEVA, V.R.İBRAHİMOV**

### **SUMMARY**

The one-and multi-step methods, which are the generalization of Runge-Kutta and Adams methods, are often used for the solution of ordinary differential equation. As these both methods are the generalized form of Eyer method, so the definite connection should be between them. The aim of this paper is the constructing of multi-step methods, using the connection between explicit Runge-Kutta and Adams methods. The formation of explicit, implicit and forward-jumping methods and their well-known comparison with the help of explicit Runge-Kutta method are given here.